LES FONCTIONS POLYGÈNES COMME INTÉGRALES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

PAR

G. CALUGARÉANO

Les fonctions polygènes. En 1912 M. Pompeiu† a abordé pour la première fois d'une façon directe l'étude des fonctions continues d'une variable complexe z en renonçant aux classiques conditions de Cauchy, qui ont l'inconvénient de trop particulariser la notion de fonction d'une variable complexe.

Récemment, M. E. Kasner a employé le terme *polygène* pour marquer cette opposition nette entre le nouveau et l'ancien point de vue. Cette dénomination se justifie aussi par ce fait que, pendant qu'une fonction monogène de z possède *une seule* dérivée en chaque point régulier, une fonction polygène en possède plusieurs et même une infinité. Ainsi, M. Kasner a reconnu‡ que, étant donnée

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \tag{1}$$

telle que P et Q possèdent des dérivées partielles du premier ordre, la dérivée de $f(z)$ suivant la direction faisant un angle ϕ avec OX est représentée par la formule suivante, les notations que nous employons étant légèrement différentes de celles déjà employées,

$$\frac{df}{dz_\phi} = \delta[f] + e^{-2i\phi}\cdot\rho[f], \tag{2}$$

avec

$$\begin{aligned} \delta[f] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right], \\ \rho[f] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Mais tous ces calculs se simplifient beaucoup en prenant comme nouvelles variables

* Presented to the Society, February 23, 1929; received by the editors in December, 1928.

† Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 33 (1912, 1st semester), p. 112; vol. 35 (1913, 1st semester), p. 277.

‡ Science, vol. 66 (1927), p. 581; Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 13 (1928), p. 75; Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 34 (1928), p. 495 and p. 561; these Transactions, vol. 30 (1928), p. 803.

$$z = x + iy\ ; \quad \bar{z} = x - iy$$

comme M. Al. Proca l'a remarqué d'abord.* On a

$$x = (z + \bar{z})/2\ ; \quad y = (z - \bar{z})/(2i)\ . \tag{4}$$

Toute fonction polygène devient alors une fonction de z par l'intermédiaire de z et $\bar{z}$, et l'on a

$$\frac{df}{dz_\phi} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} + e^{-2i\phi}\cdot\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \tag{5}$$

ce qui montre que les deux paramètres différentiels du premier ordre que constituent δ et ρ se réduisent à des dérivées partielles

$$\delta[f] = \frac{\partial f}{\partial z}\ ; \quad \rho[f] = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \tag{6}$$

$\rho[f]$ a été défini d'abord par M. Pompeiu qui l'a appelé *dérivée aréolaire* en vertu de la relation

$$2i\cdot\rho[f] = \lim \frac{1}{(\sigma)}\int_\sigma f(z)dz, \tag{7}$$

où σ représente un contour fermé entourant le point z_0 considéré et (σ) désigne l'aire que ce contour définit. La limite est prise en faisant tendre l'aire et la longeur de σ vers zéro de façon que z_0 reste toujours intérieur à σ. M. Kasner a proposé d'appeler $\delta[f]$ *dérivée moyenne*. Nous employerons aussi ces deux termes. Il est clair que si P et Q sont dérivables plus d'une fois, la formule (5) est susceptible d'être réitérée. On aura† en général*

$$\frac{d^n f}{dz_\phi^n} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + e^{-2i\phi}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n f. \tag{8}$$

La notion d'intégrale polygène d'une équation différentielle. La notion de dérivée d'une fonction de z étant ainsi élargie, on se pose tout naturellement des questions telles que la détermination d'une fonction polygène dont la dérivée est donnée, et plus généralement on est amené à se demander si une équation différentielle

$$F[z, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}] = 0 \tag{9}$$

dans laquelle on suppose avoir remplacé les dérivées par les expressions (8), est susceptible d'être vérifiée par une fonction polygène $y(z)$, *quelque soit la*

---

* Note added in proof by E. Kasner: The higher derivatives employed by M. Calugaréano are those I call rectilinear, a special case of the general curvilinear derivatives defined in my papers, where minimal coördinates are also employed.

† On trouvera un résumé de ces résultats dans notre note des Comptes Rendus, vol. 186 (1928), p. 930.

diréction ϕ qui entre dans (8). Nous verrons par la suite que la réponse est affirmative.

Fonctions polygènes analytiques. Nous nous limiterons ici à chercher les intégrales polygènes analytiques en z, et nous appelerons ainsi les fonctions polygènes de z admettant en tout point régulier de leur domaine d'existence un développement en série double de puissances de z et $\bar{z}$. Un élément tel que

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} z^m \bar{z}^n \tag{10}$$

convergera *au moins* à l'intérieur d'un cercle de rayon ρ_1 tel que

$$\frac{1}{\rho_1} = \limsup_{m+n\to\infty} \left(\left| a_{m,n} \right| \right)^{1/(m+n)}$$

de quelque façon que $(m+n)$ tende vers l'infini. Dès lors, le prolongement *à la Weierstrass* nous permettra de définir $f(z)$ dans tout son domaine d'existence, à moins que cette fonction ne possède des *lignes singulières fermées*. Dans ce cas le prolongement à la Weierstrass peut devenir insuffisant pour définir $f(z)$; tel est le cas de $1/(1-z\bar{z})$ dont le développement autour de l'origine ne saurait être prolongé au delà du cercle unité, car $1-z\bar{z}=1-r^2$ s'annulle tout le long de ce cercle; pourtant $1/(1-z\bar{z})$ existe dans tout le plan et son *expression analytique* permet de suppléer à l'insuffisance du prolongement.

Les fonctions polygènes analytiques étant définies par la possibilité d'un développement tel que (10) en tout point régulier, remarquons que ces fonctions sont *indéfiniment* dérivables. A moins qu'elles ne possèdent des coupures fermées, elles sont des fonctions quasi analytiques de z, et ceci veut dire justement qu'elles sont déterminées dans tout leur domaine d'existence une fois qu'elles sont connues dans un domaine d'aire non nulle, aussi petit qu'il soit.

Théorème établissant une liaison entre intégrales polygènes et intégrales monogènes. Nous nous occuperons donc uniquement des intégrales polygènes analytiques d'équations telles que (9). Soit donc $y(z)$ une fonction polygène analytique satisfaisant à (9) quelque soit ϕ, et considérons un segment AB parallèle à OX et entièrement intérieur au domaine de régularité de $y(z)$. Soit d sa distance à OX. On a

$$y(z) = G(z, \bar{z}),$$

G étant une fonction analytique des deux lettres qu'elle contient. Le long de AB, on aura

$$y = G(x + id,\ x - id).$$

Comme $y(z)$ est régulière sur AB, cette fonction de x est analytique au sens ordinaire. Il s'en suit, par prolongement, que

$$Y(z) = G(z,\, z - 2id)$$

est une *intégrale monogène* de l'équation (9). On voit donc que toute intégrale polygène analytique de (9) nous fait connaître une intégrale monogène par la simple substitution de $z-2id$ à $\bar{z}$. Et ceci introduit une constante d en plus, qui est en général arbitraire.

Les équations admettant des intégrales polygènes forment une classe particulière. Il est facile de voir qu'une équation différentielle du premier ordre ne saurait posséder des intégrales polygènes. En effet, on devrait avoir

$$F\left(z,\, y,\, \frac{\partial y}{\partial z} + e^{-2i\phi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right) = 0$$

quelque soit ϕ. Ceci exige

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = 0,$$

donc y est monogène en z.

Les équations qui nous intéressent sont donc au moins d'ordre 2. J'ai traité ailleurs* et d'une façon complète, le cas général de l'équation du second ordre. On trouve que la plus générale équation du second ordre, possédant des intégrales polygènes, est

$$(11) \qquad y'' + \frac{\partial \omega}{\partial y} y'^2 + 2\frac{\partial \omega}{\partial z} y' + e^{-\omega}\left\{\Phi + \int\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right] e^{\omega} dy\right\} = 0,$$

où $\omega(z, y)$ est une fonction *arbitraire* monogène en z et y, $\Phi(z)$ une fonction monogène *arbitraire* de z. Les intégrales polygènes de cette équation s'obtiennent en résolvant

$$\alpha\bar{z} + \beta z + \gamma = \mu(z,y) = \int_0^y e^{\omega(z,s)} ds$$

par rapport à y. On voit que l'intégrale polygène dépend de *trois* constantes arbitraires α, β, γ, donc elle est *plus générale* que l'intégrale monogène; l'intégrale monogène Y s'obtient, selon le théorème déjà indiqué, en changeant $\bar{z}$ en $z-C$. On trouve ainsi $Y(z)$ en résolvant

$$az + b = \mu(z,Y)$$

par rapport à Y.

Donc, l'intégration au sens classique est complète pour cette équation et il suffit d'une quadrature. Les calculs se compliquent notablement quand on essaye de traiter des équations d'ordre supérieur. La condition qui caractérise la classe d'équations différentielles possédant des intégrales polygènes paraît être assez cachée, peut être assez compliquée même.

* Voir ma note déja citée et surtout la suite, Comptes Rendus, vol. 186, p. 1406.

Mais, si toute équation différentielle ne possède pas des intégrales polygènes on voit facilement que toute fonction polygène, contenant ou non des constantes arbitraires, est intégrale d'une certaine équation différentielle. Il suffira de considérer

$$y(z) = \Phi(z, \bar{z}, c),$$

d'où

$$y' = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}},$$

$$y'' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}} + \mu^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{z}^2},$$

$$y''' = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} + 3\mu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^2 \partial \bar{z}} + 3\mu^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}^2} + \mu^3 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \bar{z}^3},$$

avec

$$\mu = e^{-2i\phi}.$$

En éliminant C, $\bar{z}$, μ entre ces quatre équations, on aura une équation différentielle que $y(z)$ vérifie.

Signalons ici certaines classes d'équations dont l'intégration peut être particulièrement facile vis-à-vis du cas général.

Rôle des équations aux dérivées aréolaires. Considérons des équations dont le premier membre est une fonction algébrique et entière par rapport aux dérivées $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ mais pouvant être une fonction monogène transcendente de z et y.

Prenons donc

$$y^{(n)} - P[z, y; y', y'', \ldots, y^{(n-1)}] = 0, \tag{12}$$

et soit

$$A(z, y)[y']^{q_1}[y'']^{q_2} \ldots [y^{(n-1)}]^{q_{n-1}}$$

un terme homogène du polynôme P. Appelons *poids* de ce terme la quantité

$$p = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + (n-1)q_{n-1},$$

et *poids du polynôme* le plus grand poids réalisé par ses termes. Limitons-nous aux équations d'ordre n et de poids $\leqq n$. Par cette particularisation nous ne faisons que renouveler les circonstances qui se sont présentées pour l'équation (11) dont l'intégration a pu être complètement achevée.

Pour intégrer (12) nous remplacerons les dérivées de $y(z)$ par leurs expressions (8), en obtenant ainsi au premier membre de (12) un polynôme de degré n en $\mu = e^{-2i\phi}$. L'égalité devant avoir lieu pour toute valeur de ϕ, on devra annuler les $(n+1)$ coefficients de ce polynôme en μ, ce qui ramène la recherche des intégrales polygènes à l'intégration d'un systéme (S_n) de

$(n+1)$ équations aux dérivées partielles en y. Les variables indépendantes seront z et $\bar{z}$ et le système sera d'ordre n.

Envisageons plus attentivement l'équation qu'on obtient en annullant le coefficient de μ^n. Il est facile de remarquer que ce coefficient, étant formé avec les coefficients des plus hautes puissances de μ dans chaque dérivée, sera un polynôme en $\partial y/\partial\bar{z}$, $\partial^2 y/\partial\bar{z}^2, \cdots, \partial^n y/\partial\bar{z}^n$ et ne contiendra *aucune* dérivée mixte telle que $\partial^{m+p}y/\partial z^m\partial\bar{z}^p$. C'est pourquoi nous appellerons *équation aux dérivées aréolaires* cette équation du système (S_n). Remarquons que pour *toute* équation du type (12) le système (S_n) contient au moins une équation aux dérivées aréolaires obtenue en annullant le coefficient de μ^n. Mais il se peut qu'il en existe plusieurs, pour des cas moins généraux. Or, l'existence de cette équation aux dérivées aréolaires simplifie l'intégration du système (S_n). Pour faire voir ceci considérons l'équation aux dérivées aréolaires correspondant à (11). Elle est de la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\bar{z}^2} + A(z,y)\left(\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}\right)^2 = 0,$$

et s'intègre facilement par quadratures,

$$\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial\bar{z}^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial\bar{z}}} = -A(z,\ y)\frac{\partial y}{\partial\bar{z}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial\bar{z}} = \Phi_1(z)e^{-\int_0^y A(z,s)ds},$$

$$\bar{z}\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = \int_0^y e^{\int_0^t A(z,s)ds}dt = \mu(z,\ y),$$

où les fonctions monogènes arbitraires Φ_1 et Φ_2 jouent, pendant l'intégration, le rôle de deux constantes arbitraires.

Il en est de même pour toute équation aux dérivées aréolaires et ceci simplifie toujours l'intégration de (S_n). M. Pompeiu a été le premier à considérer une équation aux dérivées aréolaires en se demandant s'il existe des fonctions polygènes égales à leur dérivée aréolaire. Avec la définition (7) la question semble moins facile à priori. Mais elle revient à

$$\frac{\partial E}{\partial\bar{z}} = E(z,\ \bar{z}),$$

d'où

$$\Phi(z) + \bar{z} = \log(E); \qquad E = \Phi_1(z)\cdot e^{\bar{z}},$$

où Φ_1 et Φ désignent des fonctions monogènes. Il arrive de plus que toute équation aux dérivées aréolaires, meme si elle ne peut pas être intégrée complètement, est réductible à un ordre moindre; son ordre peut toujours etre réduit d'une unité.

En effet, soit

$$(13)\quad \frac{\partial^n y}{\partial \bar{z}^n} = \sum_{s=0}^{n} A_{p_1,q_1;\,p_2,q_2;\,\ldots\,;\,p_s,q_s}(z,\,y)\left[\frac{\partial^{p_1} y}{\partial \bar{z}^{p_1}}\right]^{q_1}\left[\frac{\partial^{p_2} y}{\partial \bar{z}^{p_2}}\right]^{q_2}\cdots\left[\frac{\partial^{p_s} y}{\partial \bar{z}^{p_s}}\right],$$

l'équation en question, les $A(z, y)$ étant monogènes en z et y en vertu des hypothèses faites sur (12). Pour intégrer cette équation, on considérera z comme un paramètre et l'on remarquera que $\bar{z}$, la véritable variable indépendante, ne figure pas explicitement dans cette équation. On prendra donc $\bar{z}$ comme fonction et y comme nouvelle variable indépendante, et l'ordre sera ainsi rabaissé d'une unité. Si la nouvelle équation peut être complètement intégrée on aura

$$(14)\qquad \bar{z} = F(z,\,y)$$

qui, résolue par rapport à y, donnera l'intégrale de (13).

Les n constantes arbitraires $\Phi_k(z)$ qui s'introduisent ainsi doivent être considérées comme fonctions arbitraires, monogènes, de z. Ceci nous précise la forme analytique de l'intégrale polygène comme fonction* de $\bar{z}$. Pour avoir son expression complète et pour s'assurer de son existence effective qui n'est pas encore établie, il reste à discuter les n autres équations de (S_n). Ceci peut se faire en substituant y donné par (14) dans ces n équations, ce qui permet d'en tirer des conditions supplémentaires pour les n fonctions arbitraires $\Phi_k(z)$ et pour les coefficients $A(z, y)$ de (12). Mais ces dernières conditions, qui précisent la classe d'équations (12) admettant des intégrales polygènes, peuvent s'obtenir par un calcul plus symétrique, quoique assez laborieux, en éliminant les dérivées de y entre les $(n+1)$ équations de (S_n).

Enfin, la substitution de $z-C$ à $\bar{z}$ transformera les intégrales polygènes ainsi obtenues en des intégrales monogènes de la même équation. Il n'est pas sûr à priori que celles-ci contiennent effectivement n constantes arbitraires.

On voit donc que l'étude des intégrales polygènes d'une équation différentielle est de nature à nous fournir des renseignements sur les intégrales monogènes de la même équation, que le théorème classique de Cauchy concerne uniquement.

* On remarque facilement que, pour des équations du type (12), celle-ci se réduit à un polynome de degré $(n-1)$ en $\bar{z}$, à coefficients monogènes en z, toutes les fois que le poids de P est $<n$. Il en est tout autrement quand il est $=n$.

University of Paris,
Paris, France